

中年級學童「部份—全體」運思的發展： 文字題選圖與解題作業表現的差異

蔣治邦

政治大學心理學系

論文編號：01001；初稿收件：2001年1月5日；完成修正：2001年6月10日；正式接受：2001年6月28日
通訊作者：蔣治邦 11605台北市文山區指南路二段六十四號心理學系

在數學教材中，常見使用圖形來說明抽象概念或問題解法的教學建議。本研究在加減運算範圍，探討圖形表徵理解能力的發展，透過選擇題作業，實驗一觀察916名二至四年級學童對文字題與圖形表徵（長條圖或方格圖）轉譯的辨識表現。實驗二觀察466名三、四年級學童對文字題與線段圖（單線段或雙線段）轉譯的辨識表現，來探討學童概念的發展，以及圖形型式對學童轉譯辨識表現的影響。實驗三透過236名三、四年級學童解題作業上的表現，探討附加線段圖在解題過程中所扮演的角色。綜合三個實驗的結果，各項作業上皆呈現年級效果，顯示「部份—全體」關係的掌握，在中年級仍持續的發展。圖形型式並未影響選圖表現，學童選擇圖形表徵時的困難，與各數量間的關係有關，而與各個數量的本身無關，問題語意與線段圖型式的契合假設亦尚未獲得支持。比較實驗二、三的結果，顯示學童解題表現優於圖形選擇表現。在文字題上附加線段圖，有時能增加學童正確解題的機會，但是，效果相當有限或不穩定可靠。在「部份—全體」運思發展的架構下，進一步討論實驗結果的意涵，以及可能的數學教學建議。

關鍵詞：部份—全體運思發展、圖形表徵、加減文字題

在解答一個文字題的過程中，涉及理解題意與計算兩種歷程（Fuson, Carroll, & Landis, 1996；Mayer, Lewis, & Hegarty, 1992；Silver & Thompson,

1984），廣義的理解題意歷程，包含語文理解、整合題意、建構適當的情境或數學模型(model)，來掌握問題中各數量間的關係或形成解題計畫（蔣治邦，1993）；而計算歷程則強調運用各種知識執行解題計畫中的運算。

研究中發現，用圖畫方式呈現問題（林美惠，1997；Moyer, Sowder, Threadgill-Sowder, & Moyer, 1984），或在文字題上附加圖畫（Cohen & Stover, 1981），可以使數學問題較易理解而增加解題成功的機會。當要求學童解決問題並畫出（或選擇）圖形來表徵問題時，適當的圖形表徵反映對問題情境的理解，亦伴隨著解題的成功（朱建正、吳昭容，1993；Cummins, 1991）。面臨困難問題時，建議用圖形來協助對問題情境的理解，是解題訓練課程中常談及的策略（吳昭容，1990；Polya, 1945；Schoenfeld, 1985）。雖然，學習圖形的表徵方法，對問題解決或概念學習到底是有助益或是妨礙？尚有許多的爭論（參見吳昭容，1990；Gutstein & Romberg, 1995），但是，在數學教材中，常見使用圖形來說明抽象概念或問題解法的教學建議。在這樣的使用背景下，本研究探討圖形表徵理解能力的發展與其對解題表現的影響。

本研究所關心的圖形表徵，特指使用線段（長度量）來表示問題情境中的數量，並透過線段的空間關係（視覺線索）來表現各數量間的關係。此類數學教育環境中常用的圖形表示法，是文化的產品，特選的圖形表徵系統本身是一種精練的溝通工具，它已選擇文字問題情境中的重要資訊（數量與關係），再選擇線段的型式表徵出來，這些選擇的理由皆是隱含的(implicit)，圖形本身所提供的視覺線索，並不必然如理想中的那麼明顯易見(transparent)(Cobb, Yackel, & Wood, 1992)，閱讀者需要

表一
加減文字題的類型與示例

類 型	例 子
改變	
結果量未知	(1) 小明有3顆糖，小華又給小明5顆，問小明現在有幾顆糖？ (2) 小明有8顆糖，然後小明給小華3顆，問小明現在有幾顆糖？
改變量未知	(3) 小明有3顆糖，小華又給小明一些糖後，現在小明有8顆糖，問小華給小明幾顆糖？ (4) 小明有8顆糖，然後他給小華一些糖後，現在小明有3顆糖，問小明給小華幾顆糖？
起始量未知	(5) 小明有一些糖，小華給他5顆糖後，現在小明有8顆糖，問小明原來有幾顆糖？ (6) 小明有一些糖，然後他給小華5顆，現在小明有3顆糖，問小明原來有幾顆糖？
合併	
總數未知	(1) 小明有3顆糖，小華有5顆糖，問小明和小華共有幾顆糖？ (2) 小明和小華有一些糖，小明有3顆糖，小華有5顆糖，問小明和小華共有幾顆糖？
子集合未知	(3) 小明有3顆糖，小華有一些糖，小明和小華共有8顆糖，問小華有幾顆糖？ (4) 小明有一些糖，小華有5顆糖，小明和小華共有8顆糖，問小明有幾顆糖？ (5) 小明和小華共有8顆糖，小明有3顆糖，問小華有幾顆糖？ (6) 小明和小華共有8顆糖，小明有一些糖，小華有5顆糖，問小明有幾顆糖？
比較	
差異量未知	(1) 小明有8顆糖，小華有3顆糖，問小明比小華多幾顆糖？ (2) 小明有8顆糖，小華有3顆糖，問小華比小明少幾顆糖？
被比較量未知	(3) 小明有3顆糖，小華比小明多5顆糖，問小華有幾顆糖？ (4) 小明有8顆糖，小華比小明少5顆糖，問小華有幾顆糖？
參照量未知	(5) 小明有8顆糖，小明比小華多5顆糖，問小華有幾顆糖？ (6) 小明有3顆糖，小明比小華少5顆糖，問小華有幾顆糖？
等化	
	(1) 小明有3顆糖，他再買5顆糖後，就會和小華有一樣多的糖，問小華有幾顆糖？ (2) 小明有8顆糖，他吃掉5顆糖後，就會和小華有一樣多的糖，問小華有幾顆糖？ (3) 小明有8顆糖，小華有3顆糖，問小華要再買幾顆糖後，才能和小明一樣多？ (4) 小明有8顆糖，小華有3顆糖，問小明要吃掉幾顆糖後，才能和小華一樣多？ (5) 小明有8顆糖，小華再買5顆糖後，就會和小明有一樣多的糖，小華原來有幾顆糖？ (6) 小明有3顆糖，小華把自己的糖吃掉5顆後，就會和小明有一樣多的糖，小華原來有幾顆糖？

調整與擴充自Riley *et al.* (1983) 與翁嘉英，鄭昭明 (1988)。

發展相關的概念，才能正確解讀。本研究贊同Gutstein和Romberg(1995)的看法：當看到他人描繪的線段圖時，學童是否能賦予正確意義？這是值得關心的研究問題。

本研究在加減運算範圍內，實驗一透過選圖作業，觀察二至四年級學童對文字題與圖形表徵（長條圖或方格圖）轉譯的辨識表現，實驗二同樣地透過選圖作業，觀察中年級學童對文字題與線段圖（單線段或雙線段）轉譯的辨識表現，來探討學童概念的發展，以及圖形表徵的型式對學童轉譯辨識表現的影響。實驗三透過解題作業，探討線段圖在中年級學童解題過程中所扮演的角色。

加減文字問題的類型

在加減運算範圍內，多數的研究都採用相同的問題情境分類系統，按照文字題描述的語意，區分

改變(change)、合併(combine)、比較(compare)及等化(equalizing)四類情境，再依數量運作方向（例如：增加、減少、比多、比少）與未知數量在問題中的角色，進一步地區分各種類型的文字題（參見表一中各類文字題的例子）。為了描述的方便，仿照其他研究文獻的慣例，使用「類型—數字」的編組，來指示某種特殊類型的文字題，例如「改變1」指示在增加的改變情境中結果量未知問題。先前的研究結果，已提供相當充足的資料，來描述各類問題的相對難度，因此本研究採用此範圍，方便選擇適當難度的問題情境。

「部份—全體」運思的發展

文字題透過數字來描述各種量的多寡，透過行動（例如：給、受）或關係（例如：和…共，比…多，比…少）語句，來指示各種量的角色與關係。

Riley、Greeno和Heller(1983)主張在解題的過程中，需要使用問題基模(problem schemata)來理解文字題描述，學童的問題基模的發展分為三個層次，各個層次的差別在於其表徵訊息的方式。以改變類型問題為例，在早期的發展中，以計數(counting)活動為基礎，學童擁有製作集合(make set)的能力，可以透過實物的協助，逐步地模擬題目中的描述，形成具體的外在表徵，「演出」(act out)問題情境，來探究演出行動的結果，或解決結果量未知問題。逐漸地，學童可以形成部分內在表徵，這種發展協助學童區分並同時掌握行動的內容(改變量)與行動的結果(結果量)，掌握改變量未知問題的題意，但面對起始量未知問題時，因無起始數量來啟動行動，而產生解題的困難。唯有達到第三個發展層次，學童問題基模具有可逆溯(reversible)「部份—全體」(part-whole)關係的推論能力，「兩個部份集合合成總集合」與「由總集合中分解出一部份集合獲得另一部份集合」兩個描述可以互相推論，才能透過由上而下的歷程，分析題目中各個數量間所具有的「部份—全體」關係，來解答起始量未知問題。

Nesher、Greeno和Riley(1982)主張當學童擁有「部份—全體」的基模後，才能內在地表徵差異量 $n(A - B)$ 。在面對被比較量未知的問題時，「比…多」的描述引發加法計算，「比…少」的描述引發減法計算；但是，在參照量未知題，「比…多」要求減法，「比…少」要求加法，學童需要發展更高層次、包含可逆溯非對稱關係(non-symmetrical relations)能力的問題基模，才能更彈性地理解比較問題：若 $A > B$ ， $n(A - B) = C$ ，則 $A - C = B$ 或 $B + C = A$ ，在「小華有5顆糖，小明比小華多3顆糖，小明有幾顆糖？」的被比較量未知問題中，取用 $B + C = A$ 的解釋，而在「小明有8顆糖，小明比小華多了3顆糖，小華有幾顆糖？」的參照量未知問題中，選取了 $A - C = B$ 的解釋，才能成功地理解參照量未知問題。

綜合而言，此發展理論建議問題基模的品質影響學童理解問題的方式，例如，幼稚園與低年級學童問題基模的發展，多在Riley、Greeno和Heller(1983)描述的第一、二層次，在加減文字題的訪談研究中，顯示這些學童依賴情境的描述，在模擬行動中實踐各數量間的關係(蔣治邦、鍾思嘉，1991；Carpenter, 1985)，例如，在面對改變2、3與比較1三類成人皆歸類為減法的問題時，由於問題敘述指示不同類型的量的運作，比較1常引發學童對兩個數量進行配對比較的活動，改變2引發對一個數量進行分解的活動，而改變3引發嘗試合成的活動。

由於題意理解方式的限制，未知數角色因素對幼稚園與低年級學童的解題表現顯示相當穩定的影響(王逸文，1984；翁嘉英、鄭昭明，1988；蔣治

邦、鍾思嘉，1991；蔣治邦，1993；Carpenter, 1985；Carpenter & Moser, 1983；Fuson & Carroll, 1996；Riley *et al.*, 1983)，在改變問題中，結果量未知問題最易，改變量未知問題次之，起始量未知問題最難；在合併問題中，子集合未知較總數未知問題困難；在比較問題中，參照量未知問題較差異量未知或被比較量未知問題困難。

進入中年級後，除了參照量未知比較問題(比較5、6)仍較困難外，其他類型加減文字題的難度多已降低(Carpenter, 1985；Riley *et al.*, 1983)，研究上將這樣的進步，歸因於「部份—全體」運思的發展，學童不再依賴模擬情境來理解問題，而是透過由上而下的歷程，分析題目中各個數量間所具有的「部份—全體」關係，來理解問題情境。例如，在可逆溯「部份—全體」關係的觀點下，改變3不只是加數未知的合成問題，亦是部份未知的減法問題。改變5原本是無法行動模擬的起始量未知合成問題，在可逆溯「部份—全體」關係的觀點下，可被理解為部份未知的減法問題。「部份—全體」運思的發展，擴展了學童的解題能力，亦影響解題的方法。

當問題中的數量較少時，學童尚可依賴計數能力，按照問題情境中的描述，在運作中實踐各數量間的關係，進而解決問題。例如，年級較低的學童較常使用「數全部」(counting all)計數策略，或逐漸調適為「向上數」或「向下數」的計數策略(蔣治邦、鍾思嘉，1991；Carpenter, Hiebert, & Moser, 1983)。但是當問題中的數量增大後，計數的過程漸趨繁雜，而易產生監控的困難與錯誤，需透過「部份—全體」關係的推論能力，用標準算式(canonical number sentence)來表現問題中各數量的關係，才方便應用新發展的加、減運算法則，來簡化解題的計算過程(蔣治邦，1993)。

由於學習環境中成人的干預，學童即使表現出成功的解題，並不必然反映使用「部份—全體」關係來掌握題意，蔣治邦與葉淑儀(1995)使用判斷作業的訪談，將一個改變文字題(改變量或起始量未知)，與一個正確(或錯誤)的標準(或開放)算式相對照，要求二、三年級下學期學童判斷該算式是否用來解這個問題，並說明判斷的理由，三下高數學成就的學童對標準算式的正確判斷達90%，而69%的判斷是依據「部份—全體」關係的推論，亦有13%的判斷不能提供理由。相對於運用學童算式判斷的辯解(justification)資料，本研究透過圖形表徵選擇作業，探究中年級學童「部份—全體」運思的發展。

圖形表徵

延伸Bruner(1966)概念發展的觀念，Lesh與其同事(Lesh, 1981；Lesh & Landau, 1983；Lesh, Post, &

Behr, 1987)認為一個數學概念或想法，可以用五種不同物理型式的外在表徵(external representation)系統來外顯化：真實情境（事件或狀態）、口語敘述、具體物、圖形及文字符號，學童是否能自由地將各種表徵系統（包含系統內不同的表徵方式）互相轉譯是判斷數學概念理解程度的一項重要指標（吳昭容，1990；Gutstein & Romberg, 1995；Haylock & Cockburn, 1989；Janvier, 1987；Lesh & Landau, 1983）。

以加減數學模式為例，學童除了需要熟練加減的運算法則，更需要理解加減運算的意義(NCTM, 1989)。在真實的或敘述的問題情境中，「看」到加減運算的結構，使用具體物、圖形或算式，來表徵問題中數量間的關係，模擬加減的運作。要使得外在表徵系統成為數學概念或想法的溝通工具，閱讀（觀察）者必須發展相關的概念，才能正確地解讀敘述者意圖傳達的訊息。學童逐漸地學習數學語言（圖形或符號），發展數學模式，來協助理解及簡化問題，而使用圖形來表徵問題的能力，是探討學童數學概念發展的一項指標。

要求學童解題並畫出圖形來表徵問題，朱建正和吳昭容(1993)發現：能在圖示中用某種合理的方式來標示問題的數量關係者，其解題的正確率較高，並發現大約至六年級，才有較多的學童能運用較有效、較有意義的空間關係（例如：集合圖、線段圖），來表徵問題中的數量關係。

朱建正和吳昭容(1993)探討學童繪製圖形表徵的能力，相對地，本研究探討學童圖形表徵的閱讀理解能力。用文字敘述來呈現問題情境時，行動語句直接指示行動（如改變、等化問題），關係語句透過日常生活經驗來實踐、行動化各數量間的關係（如合併、比較問題，這些問題類型的標籤反映其行動的傾向），相對地，運用線段及線段空間關係來表現問題情境的圖形表徵，是一種靜態地、抽象地呈現數量間「部份－全體」關係的型式，僅透過一個圖形表徵的觀察，並不必然能回溯它原始的行動或繪製過程，它可以用來表徵任何問題類型的情境。因此，要求選擇適當的圖形來表徵一個文字題時，選擇者需依賴文字敘述與圖形描繪的共同性質—「部份－全體」關係。

在選圖作業的要求下，雖然，選擇者可依據對指定文字題的行動理解，自行透過繪圖的方式來實踐行動，再進行與圖形選項的比對，進而完成選圖作業，此過程並不必然涉及「部份－全體」關係的抽象理解，但是，本研究假設當學童確實是透過「部份－全體」關係來理解文字題，而且圖形表徵中的「部份－全體」關係確實明顯易見，以相同的「部份－全體」關係為判斷基礎，將增加選圖作業的成功率。學童在選圖作業上的表現，可以協助澄清「部份－全體」運思的發展，或協助釐清學童運

用「部份－全體」運思來協助解題的能力。

實驗一

在國立編譯館改編本國民小學數學教材中，二年級上學期（第三冊，1990）曾短期地出現類似方格圖與長條圖的樣式，來表徵加減問題，長條圖中表現各數字與未知數間的分解或合成關係，方格圖更進一步地表現了數字的量。但是學童是否習得此兩種圖形型式，來表徵複雜的改變型問題呢？

研究方法

本實驗選取蔣治邦(1990)研究中四類改變類型的問題，探討二、三、四年級下學期學童使用圖形來表徵問題的能力，並檢驗方格圖或長條圖此兩種圖形表徵型式，對學童轉譯表現的影響。

受試者

本實驗於八所台北市國民小學中，抽取二、三、四年級各一班，共922名學童，在80學年第二學期的最後一個月中，進行測試，由於題本裝訂過程的疏失，造成5名二年級與1名四年級學童資料無效，最後的樣本為二年級282人；三年級315人；以及四年級319人。

工具

本實驗工具為選圖作業題本，除了一個例題外，每份題本包含16題文字題，分為四類題目：多餘資訊結果量未知單一步驟問題（簡稱「簡單多餘資訊題」），由單一步驟結果量未知問題（改變1、2各兩題）加上多餘資訊形成；多餘資訊改變量未知單一步驟問題（簡稱「複雜多餘資訊題」），由單一步驟改變量未知問題（改變3、4各兩題）加上多餘資訊形成，多餘資訊是指在題目中與正確解題無關之數字，皆位於需要運算的兩數字之間；結果量未知兩步驟問題（簡稱「結果量未知題」），由兩種單一步驟結果量未知問題（改變1、2）組合而成；第二事件改變量未知兩步驟問題（簡稱「第二事件未知題」），由一個單一步驟結果量未知問題（改變1、2）加上一個單一步驟改變量未知問題（改變3、4）形成。每一類型各有四題。在題本中，四類題目混合出現，以拉丁方格設計的方式，安排題目順序。

本實驗使用兩種圖形型式（參見表二中的例題）來表徵文字題，一為長條圖，用兩條上下並且等長的長條線段，來表示題目中各數字與未知數之間的關係，一長條線段表示起始量與增加改變

表二
在算式測試A、題本中，簡單多餘資訊題、複雜多餘資訊題、結果量未知題及第二事件未知題的例子。

	A 題本	B 題本
簡單多餘資訊題	<p>大華有 8 元，小明有 6 元，爸爸給大華 4 元後，請問現在大華有多少錢？</p> <p>(1) </p> <p>(2) </p> <p>(3) </p> <p>(4) </p>	<p>大華有 48 元，小明有 36 元，爸爸給大華 24 元後，請問現在大華有多少錢？</p> <p>(1) </p> <p>(2) </p> <p>(3) </p> <p>(4) </p>
複雜多餘資訊題	<p>小娟有 48 輛火柴盒小汽車，興華有 16 輛，小娟送給興華一些火柴盒小汽車後，現在小娟還有 36 輛，請問小娟給興華多少輛火柴盒小汽車？</p> <p>(1) </p> <p>(2) </p> <p>(3) </p> <p>(4) </p>	<p>小娟有 12 輛火柴盒小汽車，興華有 4 輛，小娟送給興華一些火柴盒小汽車後，現在小娟還有 9 輛，請問小娟給興華多少輛火柴盒小汽車？</p> <p>(1) </p> <p>(2) </p> <p>(3) </p> <p>(4) </p>
結果量未知題	<p>小明原有 72 條橡皮筋，送給小華 36 條，又送給小輝 12 條，請問小明現在有多少條橡皮筋？</p> <p>(1) </p> <p>(2) </p> <p>(3) </p> <p>(4) </p>	<p>小明原有 18 條橡皮筋，送給小華 9 條，又送給小輝 3 條，請問小明現在有多少條橡皮筋？</p> <p>(1) </p> <p>(2) </p> <p>(3) </p> <p>(4) </p>
第二事件未知題	<p>小娟有 9 輛火柴盒小汽車，小輝送給小娟 3 輛火柴盒小汽車，小娟再送給大華一些，現在小娟還有 4 輛，請問小娟送給大華多少輛火柴盒小汽車？</p> <p>(1) </p> <p>(2) </p> <p>(3) </p> <p>(4) </p>	<p>小娟有 54 輛火柴盒小汽車，小輝送給小娟 18 輛火柴盒小汽車，小娟再送給大華一些，現在小娟還有 24 輛，請問小娟送給大華多少輛火柴盒小汽車？</p> <p>(1) </p> <p>(2) </p> <p>(3) </p> <p>(4) </p>

量，另一條表示減少改變量與結果量；另一為方格圖，除了與長條圖使用同樣的方式來反映數字間關係外，更將題目中的各個數字，用方格來表示數量。為了配合兩種圖形型式，每個文字題都採用兩組數字，兩組數字間呈整數比，使用大數組數字時，採用長條圖來表徵，而使用小數組數字時，採用方格圖來表徵。所有的選項採手繪方式完成，用5毫米(mm)為繪製各個方格長度的單位，而取消橫排方格間的隔線則形成相對應的長條圖。

每一問題皆呈現四個圖形選項：除了一個正確選項外，多餘資訊題的三個錯誤選項分別為：(1)僅呈現相關的兩個已知數與未知數，但其關係與文字題中描述相異，彷彿注意到相關的兩已知數量，但選擇錯誤運算；(2)呈現三個已知數以及未知數，且其相互關係，彷彿完成正確運算後，又錯誤地對其結果與無關數字進行運算，形成錯誤的兩步驟運算解答；(3)呈現三個已知數以及未知數，且其相互關係，彷彿對相關的兩已知數量進行錯誤運算後，又錯誤地對其結果與無關數字進行運算，形成錯誤的兩步驟運算解答；兩步驟問題的三個錯誤選項分別為：(1)僅呈現兩個已知數與一個未知數，其關係彷彿錯誤地忽略了一個相關數量，形成單一步驟運算的解答；(2)呈現三個已知數以及未知數，且其相互關係，彷彿進行兩步驟運算，但其中的一個運算是錯誤的；(3)呈現三個已知數以及未知數，且其相互關係，彷彿進行兩步驟運算，但其中的兩個運算皆是錯誤的。

本實驗有A、B兩種題本，在題本上操弄圖形型式。A題本的簡單多餘資訊題及第二事件未知題使用小數組數字（方格圖），而B題本的簡單多餘資訊題、及第二事件未知題使用大數組數字（長條圖）；相對地，A題本的複雜多餘資訊題及結果量未知題使用大數組數字（長條圖），B題本的複雜多餘資訊題及結果量未知題使用小數組數字（方格圖）。

A、B題本中的題目，其情境皆為購物、儲蓄、或送東西，題目利用電腦打字印製於8.5 × 6平方英尺的白紙上，所有文字皆加上注音，每頁紙上呈現一文字題，下列四個圖形選項，並印出一方框以供填寫答案。所有題目按次裝訂成冊，學童直接在題本上作答。

實驗程序

為了降低班級變項對研究結果的干擾，本實驗以班級為區組，施行區組化隨機分配程序，在施行過程中，首先將本實驗的A、B兩種題本，以區組隨機方式安排次序，加以編號，進入班級後，按題本編號，依著學童座位次序分發，此種安排使得每個班級內，使用A、B題本的人數相當，而且各個學童

採用何種題本，是經過隨機分配的程序。

本實驗利用學童平時上課時間施測。主試和襄試進入預定受測班級，襄試按題本編號順序發下題本，主試以一個例題說明測試內容及作答方式，例題頁上呈現由兩個改變組成的兩步驟文字題，其中三個已知數皆小於10，四個選項用長條圖型式繪製，主試要求學童想一想這個文字題要怎樣畫，在四個答案裡面有四種畫法，判斷那一種是對的，主試接著和全班學童逐選項檢查，最後說明將正確選項前的標號填寫在答案框內。學童若沒有任何疑問，就開始作答。所有的題目由學童自行閱讀與作答，沒有任何時間限制。在測試進行中，主試或襄試僅協助唸出學童看不懂的字詞，至於其他疑問，主試和襄試皆回答“多想想看”。

結果與討論

年級與型式對學童辨識正確圖形選項的影響

本實驗探討學童使用方格圖或長條圖來表徵問題的能力，對簡單多餘資訊題、複雜多餘資訊題、結果量未知題、及第二事件未知題四類問題，分別進行3（年級）× 2（題本）二因子變異數分析，年級與題本皆為受試間變項。表中呈現二、三、四年級學童在各類問題上答對的題數。

依據變異數分析的結果，在四類問題上，皆呈現顯著的年級效果（簡單多餘資訊： $F(2, 910) = 44.63, MSe = 2.02, p < .01$ ；複雜多餘資訊： $F(2, 910) = 54.65, MSe = 2.01, p < .01$ ；結果量未知： $F(2, 910) = 57.70, MSe = 1.38, p < .01$ ；第二事件未知： $F(2, 910) = 36.75, MSe = 1.08, p < .01$ ），經由Scheffé事後比較，在簡單多餘資訊問題中，四下學童答對的題數，顯著地高於三下($S = 2.92, p < .05$)及二下($S = 9.27, p < .01$)，而三下學童的表現，顯著地高於二下($S = 5.42, p < .01$)；在複雜多餘資訊題上，四下學童的表現顯著地優於三下($S = 4.21, p < .01$)及二下($S = 10.40, p < .01$)，而三下學童的表現，顯著地優於二下， $S = 6.29, p < .01$ ；在結果量未知題上，四下學童的表現顯著地優於三下($S = 3.78, p < .01$)及二下($S = 10.28, p < .01$)，而三下學童的表現，顯著地優於二下， $S = 6.59, p < .01$ ；在第二事件未知題上，四下學童的表現優於三下($S = 4.64, p < .01$)及二下($S = 8.54, p < .01$)，而三下學童的表現優於二下($S = 4.01, p < .01$)。

題本的主要效果或年級與題本的交互作用在四類問題上皆未達顯著水準，方格圖（小數組）或長條圖（大數組）不同的表徵方式，沒有影響學童的表現。長條圖中，只顯示各數量間的關係，而方格

表三

實驗一選圖作業A、B題本中各類問題^a表現的平均數與標準差(括弧內)

	二年級		三年級		四年級	
	A題本 n = 142	B題本 n = 140	A題本 n = 158	B題本 n = 157	A題本 n = 158	B題本 n = 161
簡單多餘 資訊題	方 ^b 1.70 (1.50)	長 1.78 (1.40)	方 2.59 (1.47)	長 2.39 (1.45)	方 2.87 (1.35)	長 2.76 (1.36)
複雜多餘 資訊題	長 1.13 (1.36)	方 1.21 (1.34)	長 1.89 (1.48)	方 1.92 (1.37)	長 2.32 (1.44)	方 2.43 (1.49)
結果量 未知題	長 2.31 (1.35)	方 2.24 (1.37)	長 2.94 (1.11)	方 2.88 (1.19)	長 3.27 (0.97)	方 3.26 (1.05)
第二事件 未知題	方 1.64 (0.95)	長 1.70 (0.95)	方 2.07 (1.03)	長 1.95 (1.05)	方 2.47 (1.15)	長 2.32 (1.06)

a：各類問題皆有4題。

b：選圖圖形型式。A題本中，簡單多餘資訊及第二事件未知題為方格圖，複雜多餘資訊及結果量未知題為長條圖。B題本中，簡單多餘資訊及第二事件未知題為長條圖，複雜多餘資訊及結果量未知題為方格圖。

表四

各種類型題目在實驗一選圖作業與蔣治邦(1993)解題作業^a上之答對率

問題類型		實驗一選圖作業						蔣治邦(1993) ^a	
		二年級		三年級		四年級		三	四
		方格圖	長條圖	方格圖	長條圖	方格圖	長條圖	解題	解題
簡單多餘	改變1+多餘	43.7	45.8	65.5	60.2	70.9	68.3	74.4	82.6
資訊題	改變2+多餘	41.5	43.2	63.9	59.2	72.8	69.9	81.4	89.2
複雜多餘	改變3+多餘	26.4	23.2	39.8	40.5	55.9	52.2	67.3	83.6
資訊題	改變4+多餘	34.3	33.1	56.1	53.8	65.8	63.6	83.9	91.2
結果量	改變1+改變1	65.7	70.4	81.5	86.7	93.2	91.8	87.3	89.4
未知題	改變1+改變2	67.9	64.8	83.4	72.8	88.2	89.9	84.2	95.0
	改變2+改變1	33.6	33.1	47.8	60.1	63.4	63.3	82.3	88.1
	改變2+改變2	57.1	62.7	75.2	74.7	81.4	81.6	90.5	95.0
第二事件	改變1+改變3	33.8	39.3	59.5	50.3	72.8	71.4	58.9	72.5
未知題	改變1+改變4	72.5	68.6	76.6	70.1	77.2	79.5	66.5	75.0
	改變2+改變3	9.2	6.4	15.2	14.6	25.3	18.0	55.7	50.6
	改變2+改變4	48.6	55.7	55.7	60.5	71.5	63.4	61.4	86.3

a：解題答對率引自蔣治邦(1993)。多餘資訊題部份為三下、四下學童的表現，而兩步驟問題部份為三上、四上學童的表現。

圖中，同時呈現數量以及各數量間的關係，當此兩種圖形型式未造成差異時，顯示學童選擇圖形表徵時的困難，與是否理解各數量間關係較有關，而與各個數量的本身無關。

本實驗繪製方格圖與長條圖時，皆用兩條上下並列且等長的長條線段，來表示題目中各數字與與未知數之間的關係，一長條線段表示起始量與增加改變量，另一條表示減少改變量與結果量；此種繪製方式，反映部份一整體關係的分析，兩個部份合

起來和整體相等，但是，改變情境的問題描述，強調單一集合改變的狀態，而非兩個部份合起來與整體的比較狀態；圖形型式與文字題情境描述的契合程度，是否影響學童的選圖作業表現？將在下一個實驗中進行探討。

各種類型問題上的答對率與錯誤類型

表四呈現學童在選圖作業上各種類型問題的答

對率，並列出蔣治邦(1993)研究中相同類型問題的解題表現。在多餘資訊問題部份，學童的選圖表現顯示問題情境的影響，此趨勢與先前問題難度研究相當一致（王逸文，1984；蔣治邦、鍾思嘉，1991；Carpenter & Moser, 1983；Riley *et al.*, 1983）；當學童選擇錯誤圖形時，各年級學童皆傾向將多餘資訊單一步驟問題，視為兩步驟問題（各約佔80%）。

在兩步驟問題部份，學童的選圖表現亦顯示問題情境結構的影響，在結果量未知問題上的表現優於第二事件未知問題，此趨勢與蔣治邦(1993)研究結果相一致；當學童選擇錯誤圖形時，各年級學童皆傾向混淆了已知與未知數量間的關係（各約佔80%），而較少選擇單一步驟運算的錯誤圖形選項。

與蔣治邦(1993)的結果比較，在相同類型的問題上，學童的選圖表現低於解題表現，在多餘資訊問題部份，四下學童解答結果量未知及改變量未知多餘資訊問題的答對率分別為86%及87%，三下學童為78%及76%，而四下學童用圖形表徵同類問題的答對率降為69%及58%，三下學童降為62%及48%，同樣為三、四年級下學期的學童，解題作業上的答對率皆超過選圖作業10%以上；在兩步驟問題部份，四上學童解答結果量未知及第二事件改變量未知兩步驟問題的答對率為92%及71%，三上學童為86%及61%，而四下學童在同類問題選圖作業上的答對率降為82%及60%，三下學童降為72%及50%，三、四年級上學期的學童在解題作業上各類問題的答對率，相當或超過三、四年級下學期學童在選圖作業的表現。雖然在兩次測試中，採用不同學校的受試，但亦令人懷疑：部份學童能解決問題時，仍不能使用圖形來表徵問題。

實驗二

實驗一的結果顯示學童選圖作業的表現並不理想，選擇圖形表徵時的困難，與各個數量的本身無關，而與各數量間關係的理解較有關。先前學童解題策略的研究，已描述低年級學童在解改變與比較問題時，會採用不同的策略，比較問題常引發學童對兩個數量進行配對比較的活動，而改變問題引發情境模擬，在一個數量上進行改變的活動（蔣治邦、鍾思嘉，1991；Carpenter, Hiebert, & Moser, 1983），實驗一使用改變問題情境，而長條圖或方格圖的選項，皆用兩條上下並列且等長的長條圖形型式，並不符合改變問題中在單一集合上發生改變的語意，問題語意與圖形型式的不契合現象，增加實驗一選圖作業的困難？實驗二選擇單、雙線段圖型式進行測試，進一步釐清問題語意與線段圖型式的契合程度是否影響選圖作業的表現。

實驗二選圖作業的選項，區分為單線段圖與雙線段圖兩種型式，單、雙線段圖是數學教材中常見的型式（參見表五中的例子），單線段圖的型式似乎相當能呈現改變問題中單一集合的改變狀態，或合併問題中單一集合的內部結構，但是使用單線段圖來表徵比較問題時，它較不易看出是兩個數量的配對比較狀態，相對地，雙線段圖似乎較能呈現兩個數量的比較狀態，但是要用它來表徵改變或合併問題時，學童可能需要發展「部份—全體」運思，將部份獨立於全體之外，而又能掌握部份—部份—全體間的關係，如此才能接受用一條線段來表示兩個部份的合成，一條線段表示全體，而用虛線表示兩條線段間等價部份（一樣長或一樣多的物件）。等化問題的語意同時兼具比較與改變的成份，可能較易同時接受兩種線段圖的表示。

研究方法

基於上述問題語意與線段圖型式的契合假設，實驗二採用四類文字題情境：改變、合併、比較與等化問題，操弄線段圖的型式（單線段圖與雙線段圖），對三、四年級上、下學期的學童，進行由文字題選擇適當線段圖的作業，在各類文字題的情境下，探討年級與線段圖型式對學童選圖作業表現的影響。

受試者

受試者為四所台北市國民小學中的三、四年級學童，在88學年度上、下學期，每校的二、三年級各有一班接受測試，兩學期施測班級不重複，共有十六班的學童接受測試，依測試時間，分為三上、三下、四上、四下等四個年級時段，總人數為474人。其中有8名學童因教師標示學習障礙或其作答方式錯誤等因素，其反應不列入分析資料中。

材料

題本中正式的測試問題共有十六題，合併、改變、等化與比較四類問題情境各四題，其中包含無多餘資訊與有多餘資訊問題各兩題，合併問題中的四題為合併4、合併6、合併3多餘資訊題與合併6多餘資訊題；改變問題包含改變5、改變6、改變3多餘資訊題與改變4多餘資訊題；等化問題中包含等化5、等化6、等化3多餘資訊題與等化4多餘資訊題；比較問題包含比較5、比較6、比較3多餘資訊題與比較4多餘資訊題。所有問題中的數字皆限制為兩位數，每一題的正確解法都涉及進、退位，目的在增加學童計算上的困難，減低學童根據計算結果而非依題意選圖的可能性。

表五

在合併、比較、等化、改變問題圖形判斷題本中，單、雙線段圖選項的例子

	單線段圖	雙線段圖
合併問題	<p>小明有 28 條橡皮筋，小方有 17 條橡皮筋，小明和君如共有 86 條橡皮筋，請問君如有幾條橡皮筋？</p> <p>(1) </p> <p>(2) </p> <p>(3) </p> <p>(4) </p>	<p>小明有 28 條橡皮筋，小方有 17 條橡皮筋，小明和君如共有 86 條橡皮筋，請問君如有幾條橡皮筋？</p> <p>(1) </p> <p>(2) </p> <p>(3) </p> <p>(4) </p>
比較問題	<p>美華有 36 個花片，媽媽給阿香 15 個花片後，現在阿香的花片比美華多 22 個，請問阿香現在有幾個花片？</p> <p>(1) </p> <p>(2) </p> <p>(3) </p> <p>(4) </p>	<p>美華有 36 個花片，媽媽給阿香 15 個花片後，現在阿香的花片比美華多 22 個，請問阿香現在有幾個花片？</p> <p>(1) </p> <p>(2) </p> <p>(3) </p> <p>(4) </p>
等化問題	<p>小娟有 28 個花片，君如有 24 個花片，大華有 71 個花片，大華要送給君如多少個花片後，大華和小娟才會有一樣多的花片？</p> <p>(1) </p> <p>(2) </p> <p>(3) </p> <p>(4) </p>	<p>小娟有 28 個花片，君如有 24 個花片，大華有 71 個花片，大華要送給君如多少個花片後，大華和小娟才會有一樣多的花片？</p> <p>(1) </p> <p>(2) </p> <p>(3) </p> <p>(4) </p>
改變題	<p>小均原有 25 元，小輝原有 46 元，小輝給小均一些錢以後，現在小均有 53 元，請問小輝給小均多少元？</p> <p>(1) </p> <p>(2) </p> <p>(3) </p> <p>(4) </p>	<p>小均原有 25 元，小輝原有 46 元，小輝給小均一些錢以後，現在小均有 53 元，請問小輝給小均多少元？</p> <p>(1) </p> <p>(2) </p> <p>(3) </p> <p>(4) </p>

所有無多餘資訊題皆為二選一的選擇題型式，正確線段圖選項中，兩個已知數與未知數三者間的「部份－全體」關係，與文字題中描述的關係相同，另一選項則與文字題中的關係相異。多餘資訊問題為四選一的選擇題型式，正確線段圖選項僅呈現兩個相關的已知數以及未知數，且其「部份－全體」關係與文字題中描述相同，三個錯誤線段圖選項分別為：(1)僅呈現相關的兩個已知數與未知數，但其關係與文字題中描述相異，彷彿注意到相關的兩已知數量，但選擇錯誤運算；(2)用無關的已知數取代正確選項中的一個已知數，彷彿使用正確運算（加或減），但選錯了已知數量；(3)呈現三個已知數以及未知數，且其關係與文字題中描述相異，彷彿錯誤地進行兩步驟運算。

依據正確選項的線段圖型式區分兩份題本，題本1的正確選項皆為單線段圖，題本2的正確選項皆為雙線段圖，而錯誤選項則同時包含單、雙線段兩種型式。所有的線段圖採手繪方式完成，用毫米為單位繪製所有的數量，例如用52毫米來表徵52。用雙線段型式繪製時，在改變或等化問題中，用一線段表現起始量及改變量，另一線段表現結果量或另一數量，再標示相等的部份；在合併問題中，用一線段表現集合，另一線段表現兩子集合的合併，再標示兩線段相等；比較問題的繪製，強調其比較的語意，兩線段分別表現要進行比較的兩數量，標示相等部份後，再標示差量。

使用相同題目次序製作兩份題本，題本內頁第一頁呈現圖形的示例，第二、三頁為示範題，用於向學童說明線段圖選擇題作答的方式，接著先呈現所有的無多餘資訊問題，再呈現多餘資訊問題，每個問題皆單獨成頁。各類問題情境，採用區組平衡化的原則，以減少題目出現次序的影響。所有文字皆加上注音，示範題與正式題頁的右下方，呈現一個方框，要求學童將正確選項的序號填於方框內。

實驗程序

採用與實驗一相同的程序，在各施測班級內，按座位次序區組隨機分發兩種題本，進行團體測試。主試者在學童回答正式測試問題前，先以第一頁的圖形示例，展現用52毫米線段圖來表示這裡有52個蘋果的畫法，接著再介紹表示數量相等的記號，像第一頁上描述「小明和小華有一樣多的蘋果」，所以畫一條線表示小明的蘋果，一條線表示小華的蘋果，在兩條線的兩邊用直線連起來，這樣，用兩條直的線表示這裡有一樣多的蘋果，或表示兩個數量的相等，第二、三頁為示範題，用於向學童說明線段圖選擇題作答的方式。示範題第一題（印於粉紅色紙上）為比較1問題，兩個選項皆用雙線段型式，第二題（印於藍色紙上）為改變2多餘資

表六

實驗二學童在線段圖選擇作業^a上表現的平均數與標準差（括弧內）

問題類別	三上		三下	
	單線段	雙線段	單線段	雙線段
合併	2.04 (1.34)	2.28 (1.23)	2.42 (1.51)	2.38 (1.10)
改變	1.77 (1.25)	1.93 (1.17)	2.45 (1.07)	2.07 (1.07)
等化	1.81 (1.01)	1.79 (1.07)	2.40 (0.97)	2.05 (1.10)
比較	1.86 (1.06)	1.86 (1.05)	2.18 (1.31)	2.05 (1.15)
總人數	57	58	55	55

問題類別	四上		四下	
	單線段	雙線段	單線段	雙線段
合併	2.79 (1.24)	2.92 (1.15)	2.97 (1.29)	3.07 (0.98)
改變	2.34 (1.24)	2.42 (1.05)	2.70 (1.24)	2.75 (1.15)
等化	2.49 (1.13)	2.32 (1.20)	2.43 (1.17)	2.51 (1.10)
比較	2.21 (1.28)	2.44 (1.16)	2.15 (1.23)	2.36 (1.21)
總人數	61	59	60	61

a：各類問題皆有4題。

訊問題，呈現兩個選項，皆為單線段型式，且不呈現無關的已知數。配合兩題示範題的海報，全班共同選擇正確選項，請學童判斷那一個選項上的線段圖記錄了原來的文字題，將正確選項的序號填於方框內，而不必計算出答案，在第二個示範題中，特別提醒：如果文字題中有與解題無關的數量，在線段圖上不畫出來也沒有關係。進行測試時，主試與襄試隨時注意學生的行為，如果有學童明顯地在計算，提醒他不需要計算出答案。當學童向主試或襄試表示不會作答請求協助時，僅就兩題示範題再做作答方式的說明，或唸出學童看不懂的字詞，或回答“你想想看，應該怎麼樣才能找到答案”。

結果與討論

年級時段與線段圖型式對學童選圖表現的影響

學童的選圖表現摘要於表六。對四類問題分別

表七
實驗二選圖作業與實驗三解題作業上各題的答對率

問題	年級	作業/題本	三上		三下		四上		四下	
			選圖	選圖	解題 ^b		選圖	選圖	解題	
					無 ^a	有			無	有
合併	7 ^c	合併4	67.8	71.8	89.7	96.6	81.7	82.6	98.4	96.6
	4	合併6	75.7	79.1	94.8	100.0	86.7	88.4	100.0	100.0
	13	合併3+多餘資訊	40.0	44.5	84.5	93.1	67.5	71.1	96.7	91.5
	10	合併6+多餘資訊	32.2	44.5	72.4	91.4	49.2	59.5	90.2	89.8
改變	1	改變5	60.0	72.7	96.6	91.4	70.8	81.0	91.5	100.0
	6	改變6	61.7	67.3	86.2	91.4	71.7	76.0	94.9	95.1
	16	改變3+多餘資訊	25.2	38.2	50.0	60.3	46.7	58.7	67.8	77.0
	11	改變4+多餘資訊	38.3	48.2	86.2	87.9	49.2	57.0	86.4	93.4
等化	2	等化5	73.9	78.2	100.0	93.1	82.5	81.0	91.5	100.0
	8	等化6	48.7	66.4	81.0	81.0	67.5	64.5	84.7	90.2
	9	等化3+多餘資訊	38.3	50.9	82.8	79.3	53.3	61.2	81.4	93.4
	15	等化4+多餘資訊	19.1	27.3	53.4	50.0	37.5	40.5	66.1	80.3
比較	3	比較5	68.7	66.4	77.6	75.9	76.7	81.8	95.1	91.5
	5	比較6	43.5	50.0	58.6	75.9	55.8	52.1	78.7	76.3
	14	比較3+多餘資訊	40.0	46.4	55.2	69.0	45.0	39.7	78.7	83.1
	12	比較4+多餘資訊	33.9	49.1	72.4	87.9	55.0	52.1	73.8	76.3

a：選圖作業下為實驗二各題的答對率。

b：解題作業下為實驗三各題的答對率，「無」指僅呈現文字題，「有」指隨文字題附加線段圖。

c：題本中之題號。

進行二因子變異數分析（線段圖型式×年級時段），皆顯示年級時段效果（合併： $F(3, 458) = 12.14, MSe = 1.52, p < .001$ ；改變： $F(3, 458) = 11.44, MSe = 1.34, p < .001$ ；等化： $F(3, 458) = .85, MSe = 1.21, p < .001$ ；比較： $F(3, 458) = 3.51, MSe = 1.40, p < .05$ ），依據Scheffé事後比較的分析，在合併問題上，三上學童的表現顯著地低於四上（ $S = 4.29, p < .05$ ）與四下（ $S = 5.36, p < .05$ ），三下低於四下（ $S = 3.81, p < .05$ ），而四上與四下無差異；在改變問題上，三上學童的表現顯著地低於四上（ $S = 3.51, p < .05$ ）與四下（ $S = 5.84, p < .05$ ），三下低於四下（ $S = 3.08, p < .05$ ），而四上與四下無差異；在等化問題上，三上學童的表現顯著地低於三下（ $S = 2.94, p < .05$ ）、四上（ $S = 4.25, p < .05$ ）與四下（ $S = 4.69, p < .05$ ），而三下、四上與四下無差異；在比較問題上，僅發現三上學童的表現顯著地低於四上（ $S = 2.98, p < .05$ ）。

線段圖型式或與年級時段的交互作用，則皆無可靠的效果，單、雙線段圖並未影響在各類問題上的選擇表現。此部份結果，並未支持問題語意與線段圖型式的契合假設。

各種類型問題上的答對率與錯誤類型

由於無可靠的線段圖型式差異，合併兩個題本

做進一步的觀察，選圖作業上各個問題的答對率呈現於表七，由問題情境類型進行觀察，比較問題表現最差，改變、等化問題次之，合併問題表現較優，此趨勢與問題難度研究的結果不相違背。綜合而言，學童的選圖表現相當不理想，三上學童多數問題上的答對率，尚相當接近猜題機率（無多餘資訊題皆二選一選擇題；多餘資訊問題為四選一選擇題）。

相對而言，多餘資訊問題的表現較差，四下學童在多個多餘資訊問題上的答對率皆低於60%，除了選項的多寡會影響答對率外，多餘資訊可能影響問題的理解（蔣治邦，1993），而降低了選圖表現；在多餘資訊問題中，當學童選擇錯誤圖形選項時，各年級學童皆傾向將多餘資訊單一步驟問題，視為兩步驟問題（各約佔50%），與實驗一的結果相似，為最主要的錯誤。

實驗三

實驗一的結果顯示：學童在選擇圖形表徵上的表現低於相同類型問題的解題表現，令人懷疑部份學童能夠解決問題，但不能使用圖形來表徵問題。在收集實驗二上學期的資料時，發現學童的選圖表現不盡理想，決定在下學期同步收集學童解題表現資料，以澄清實驗一結果的疑慮，並且操弄附加線

段圖的有無，考慮學童並不必然能正確判斷文字題與線段圖轉譯的情況下，探討附加線段圖對解題表現的影響。

研究方法

受試者

受試者為實驗二相同的四所國民小學的學童，選擇與實驗二不同的班級，每校三、四年級各一班學童接受測試，共有八班的學童，在88學年度下學期接受施測，總人數為238人。其中有2名學童因教師標示學習障礙因素，其反應不列入分析資料中。

材料

採用與實驗二相同的文字題，僅改變題目中的數字，使各種數量皆為兩位數，且正確解法不涉及進、退位，以降低計算的複雜。同樣的問題編製成兩份題本（題目順序與實驗二相同），在甲題本中，合併問題附加單線段圖，比較問題附加雙線段圖，其他兩類問題無線段圖；相對地，在乙題本上，改變問題附加單線段圖，等化問題附加雙線段圖，其他兩類問題無線段圖。其中單、雙線段圖的繪製方式與實驗二相同。題本內頁的第一頁呈現圖形示例（與實驗二同），展現如何用線段圖表示數量，或表示兩個數量的相等，以溝通線段圖的繪製方式。

實驗程序

採用與實驗二相同的程序，在各施測班級內，按座位次序區組隨機分發兩種題本，進行團體測試。主試者在學童回答正式施測問題前，先以第一頁的例子介紹線段圖的畫法與表示數量相等的記號（與實驗二同），然後請學童開始作答，並要求在作答時務必寫出作法。

施測進行中，主試與襄試隨時注意學生的行為，如果有學童只寫答案未寫作法，提醒他（她）將作法寫下來。當學童向主試或襄試表示不會作答請求協助時，僅唸出學童看不懂的字詞，或回答“你想想看，應該怎麼樣才能找到答案”。

反應類型分類

為了進一步地分析學童的錯誤，仿照蔣治邦(1993)的反應分析方式，本實驗將學童在題本上的反應，分為八種類型，在分類時，「學童如何解決問題？」為主要的分類指標，首先注重學童是否選

表八

實驗三甲、乙題本四類問題^a上，學童解題表現的平均數與標準差（括弧內）

問題類別	組別		三年級		四年級			
	題本		甲題本	乙題本	甲題本	乙題本		
合併	單 ^b	3.81 (0.48)	無	3.41 (1.08)	單	3.78 (0.56)	無	3.85 (0.40)
改變	無	3.19 (0.93)	單	3.31 (0.92)	無	3.41 (0.81)	單	3.66 (0.63)
等化	無	3.17 (0.86)	雙	3.03 (1.06)	無	3.24 (0.92)	雙	3.64 (0.58)
比較	雙	3.09 (0.82)	無	2.64 (1.21)	雙	3.27 (0.87)	無	3.26 (0.85)
總人數		58		58		59		61

a：各類問題皆有4題。

b：附加線段圖型式。在甲題本上，合併問題附加單線段圖，比較問題附加雙線段圖，其他兩類問題無附加線段圖；相對地，在乙題本上，改變問題附加單線段圖，等化問題附加雙線段圖，其他兩類問題無附加線段圖。

擇了正確的解題過程（運算及數字），再分辨學童是否得到正確的答案，如果學童的解題過程已呈現錯誤，則以此錯誤為分類的依據，而不重視計算其他的疏忽。依據學童在各題上留下的作法紀錄，編碼為以八種反應類型：(1)正確反應；(2)數字或答案抄錄錯誤；(3)計算錯誤；(4)選擇錯誤運算；(5)選用無關資訊數字，進行單一步驟的運算；(6)兩步驟運算；(7)未作答；與(8)其他。綜合所有試題的分析，抄錄或計算錯誤共有65個，佔樣本的1.7%，這些錯誤與題意理解無關，在嗣後的分析中視為正確解答。

結果與討論

年級與附加線段圖對學童解題表現的影響

學童的解題表現摘要於表八。對四類問題分別進行二因子變異數分析（題本 × 年級），皆顯示年級效果（合併： $F(1, 232) = 5.33, MSe = .46, p < .05$ ；改變： $F(1, 232) = 6.79, MSe = .69, p < .05$ ；等化： $F(1, 232) = 8.77, MSe = .75, p < .01$ ；比較： $F(1, 232) = 10.70, MSe = .90, p < .01$ ），四下學童的表現優於三下。

附加線段圖對學童的表現無可靠的效果（題本效果）；在合併與等化問題上有顯著的交互作用

(合併： $F(1, 232) = 7.06, MSe = .46, p < .01$ ；等化： $F(1, 232) = 5.70, MSe = .75, p < .05$)，顯示在合併問題上，附加線段圖對三下學童的助益大於四下，而在等化問題上，附加線段圖對四下學童的助益大於三下。

各種類型問題上的答對率與錯誤類型

學童在各個問題上答對率呈現於表七，無附加線段圖的測試情境，等同於平常的文字題紙筆測驗，學童的解題表現呈現多餘資訊干擾效果的趨勢，與蔣治邦(1993)的結果相仿；在無多餘資訊時，合併、改變與等化問題的難度相當，而在比較問題上的表現較差，當問題中含有多餘資訊時，合併與改變問題上的表現較佳，等化問題次之，比較問題最差，此問題情境類型影響的趨勢，與實驗二或問題難度研究的結果不相違背。

在文字題上附加線段圖，有時能增加學童正確解題的機會，整體而言，對四下學童，附加線段圖約增加4%的答對率，而在附加線段圖的情境下仍有約10%的答錯率；對三下學童，附加線段圖約增加5%的答對率，而在附加線段圖的情境下仍有約17%的答錯率。

在合併問題部份，附加線段圖對三下學童在各題上的答對率皆有助益，四下學童在無線段圖情況下的答對率已相當高，在天花板效應下，無法顯示附加線段圖的效果，而呈現年級與題本的交互作用；在改變問題部份，附加線段圖對三、四下學童在各題上答對率的助益相當一致而有限；在等化問題部份，三下學童在有或無附加線段圖下的答對率相當一致，而附加線段圖對四下學童在各題上的答對率皆有助益，而呈現年級與題本的交互作用；在比較問題部份，附加線段圖對三下學童在各題上的答對率有些許助益，四下學童在有或無附加線段圖下的答對率相差不大，然而此交互作用的趨勢並不可靠。

分析三下學童在多餘資訊問題上的錯誤，在無線段圖的情況下，60%合併問題的錯誤為進行兩步驟運算；89%改變問題的錯誤為對無關資訊數字進行單一步驟運算；57%等化問題的錯誤為對無關資訊數字進行單一步驟運算；在比較問題上，對無關資訊數字進行單一步驟運算錯誤與兩步驟運算錯誤分別為33%與43%。四下學童的進步，主要為上述錯誤的減少。當附加線段圖對答對率有所助益時，亦為上述錯誤的減少。

選圖與解題表現的比較

比較表七中實驗二的選圖表現與實驗三無附加線段圖情況下的解題表現，三下學童解題作業的答

對率超過選圖作業9%~40%，四下學童解題作業的答對率超過選圖作業9%~39%，在各個問題上，解題作業的答對率皆超過選圖作業的一致現象，很難用隨機誤差來解釋($p < .00025$)，顯示中年級學童的解題能力優於選擇適當的線段圖來表徵問題。

實驗二、三的文字題相同，且在相同的學校中進行測試，觀察到的差異，較難歸因於題目或學童樣本的不同，配合實驗一的結果，形成相當穩定的現象。

綜合討論

綜合三個實驗的結果，不論解題或選圖作業，皆呈現年級(時段)效果，顯示中年級學童加減概念的掌握，仍在持續的發展。學童解題表現優於圖形選擇表現，而圖形型式並未影響中年級學童選圖作業上的表現，學童選擇圖形表徵時的困難，在於各數量間關係的轉譯，而與各個數量的本身無關，問題語意與線段圖型式(單或雙線段圖)的契合假設亦尚未獲得支持。在文字題上附加線段圖，有時能增加學童正確解題的機會，但是，效果相當有限或不穩定可靠。針對學童在圖形選擇作業上的表現，以及附加線段圖的影響，本研究進行下列的討論。

「部份-全體」運思的發展

「部份-全體」運思的發展，意指學童問題基模的質變，或理解問題方式的轉變，由依賴行動模擬問題情境的方式，轉換為透過由上而下的歷程，掌握題目中各個數量間所具有的「部份-全體」關係。假設圖形表徵彰顯問題中數量間的「部份-全體」關係，當學童是透過「部份-全體」關係來理解文字題，以文字題與圖形選項相同的「部份-全體」關係為判斷基礎，應可增加選圖作業的成功率，故而，在選圖作業上的年級(時段)效果，仍可歸因於「部份-全體」運思的持續發展。由於線段圖形表徵的繪製與理解，在目前的數學教材中，尚為低度開發的主題，年級(時段)效果較難歸因於特殊的教學成果。

當觀察到學童解題表現優於圖形選擇表現的現象時，質疑部份學童能成功地解決各類問題時，並不必然是使用「部份-全體」關係的觀點來進行解題，與蔣治邦與葉淑儀(1995)的觀察相仿。提醒使用解題成功作為發展的判準時，將高估學童的能力，學童的成功可能僅顯示問題類型與其解法的配對記憶，而非概念層次的提昇；傾聽學童對解題方式的辯解，或觀察學童是否能自由地將各種表徵系統互相轉譯，皆可協同地來確認學童的發展。

圖形表徵理解的困難

本研究所採用的圖形（方格圖、長條圖、線段圖），皆是約定俗成的表徵系統，包含具共識的語意與文法（組織方式），與語文學習一般，欲使特殊的圖形型式成為溝通工具，需在表徵活動經驗中獲得共識，並在經常接觸中熟悉它的運用（蔣治邦，1994）。國內數學教材在統計圖表主題下，建立使用長度來表徵數量的共識，但減少有系統地使用圖形來記錄解題過程。

學童對圖形表徵的陌生，可能是解題表現優於圖形選擇表現的一個原因。但是，在實驗一、二的圖形選擇表現上，可觀察到問題情境結構的影響，此趨勢與解題難度研究的結果不相違背。若學童在圖形選擇作業上的困難，是源自於對圖形表徵型式的陌生，此因素應不會對各類問題情境結構做選擇性的影響，因而對圖形表徵系統的陌生，雖然可能是選圖作業的困難之一，但不能解釋上述的趨勢。在探討解題與選圖表現的差異時，學童理解問題情境的方式，可能是較好的解釋。

實驗一的結果，顯示學童選擇圖形表徵時的困難，在於理解或表現各數量間的關係，而與各個數量的本身無關。實驗二嘗試增加文字題情境描述與圖形型式的契合程度，但仍未能有效地提昇學童的選圖表現，為何學童在選圖作業上反映普遍的困難？除了對圖形表徵系統或選擇題作業方式的陌生外，選圖作業引入其他的認知需求？為何學童用以成功解題的理解問題方式，不能成功地來協助辨識正確的圖形選項？這些問題仍是有趣的疑惑，需要進一步研究來澄清。

附加線段圖對解題的影響

附加的線段圖重述了文字題情境中的數量關係，如果線段圖所提供的數量關係線索明顯易見，部份學童在附加線段圖情況下的解題表現，為何仍反映錯誤的數量關係理解？以解題表現優於圖形選擇的現象來看，文字敘述在學童解題過程中，佔有較顯著的地位，當無法判斷文字敘述與圖形表徵間的轉譯關係，圖形表徵喪失其輔理解的功能。

在一般的數學教材中，甚少使用圖文並置的方式來呈現問題，學童尚未經驗「此兩種呈現方式必然指示同一問題情境」的社會規約，此種安排引發有趣的問題：當對文字題與線段圖，產生不同數量關係的理解時，學童如何解決衝突？此問題仍須進一步地理解與探討。

對教學的衍生意涵

在目前的數學教材中，圖形表徵的繪製與理

解，尚為低度開發的主題，或不被視為數學學習的目標(Gutstein & Romberg, 1995)，本研究結果呈現學童解題表現優於圖形選擇表現的現象，顯示圖形表徵並非學習成功解題的必要能力。但是，線段圖型式的表徵容易彰顯問題中數量間的「部份—全體」關係，若學童在成功解題之後，能學習使用線段圖來記錄解題活動（例如：如何表現數量的合成、分解或比較）的共識，線段圖可以成為解題過程的溝通、反思工具，透過線段圖的媒介，注意到問題中數量間的「部份—全體」關係，進而發展運用「部份—全體」關係分析來理解問題情境的能力，提昇數學概念的層次。考慮這種可能的功能，是否值得開發圖形溝通工具，或如何學習圖形溝通工具，需要進一步的思考。

圖形表徵與文字題間的關係，並不如理想中的那麼明顯易見，當教師使用圖形來協助說明文字題的解題方法時，須先協助學童「看到」圖形如何確實地摘要了文字題中的數量關係，否則，教師解題方法的說明，將只是在討論另一個問題，學童不必然聯想此時的討論與原文字題解法的關係。

參考文獻

- 王逸文(1984)。「台北市幼稚園兒童解答簡單算術故事問題能力及其相關因素的研究」。中國文化大學兒童福利研究所未發表之碩士論文。
- 朱建正、吳昭容(1993)。「國小兒童使用數學圖示之發展研究」。國科會研究計畫成果報告。
- 吳昭容(1990)。「圖示對國小學童解數學應用題之影響」。國立台灣大學心理學研究所未發表之獨立研究。
- 林美惠(1997)。「題目表徵型式與國小二年級學生加減法解題之相關研究」。國立嘉義師範學院國民教育研究所未發表之碩士論文。
- 翁嘉英、鄭昭明(1988)。「國小兒童解數學應用題的認知歷程」。見梁雲霞主編：「七十七年國小課程研究學術研討會專輯」。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。
- 蔣治邦(1993)。「中年級學童解決加減文字題能力之探討：多餘資訊與兩步驟問題」。《科學教育學刊》，1，189-212。
- 蔣治邦(1994)。「由表徵觀點探討新教材數與計算活動的設計」。台灣省國民學校教師研習會主編：「國民小學數學科新課程概說（低年級）」，頁60-76。板橋：台灣省國民學校教師研習會。
- 蔣治邦、葉淑儀(1995)。「二、三年級學童使用算式表徵文字題的能力—數學成就、算式類型、文字題題型對算式判斷作業及推理過程的影響」。《華人心理學家學術研討會》。
- 蔣治邦、鍾思嘉(1991)。「低年級學童加減概念的發展」。《教育心理與研究》，14，35-68。
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. New

- York: W. W. Norton & Company.
- Carpenter, T. P. (1985). Learning to add and subtract: An exercise in problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp.17-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Carpenter, T. P., Hiebert, J., & Moser, J. M. (1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems, *Education Studies in Mathematics*, 14, 55-72.
- Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skill. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 2-33.
- Cohen, S. A., & Stover, G. (1981). Effects of teaching six-grades students to modify format variables of math word problems. *Reading Research Quarterly*, 16, 175-200.
- Cummins, D. D. (1991). Children's interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and Instruction*, 8, 261-289.
- Fuson, K. C., Carroll, W. M., & Landis, J. (1996). Levels in conceptualizing and solving addition and subtraction compare word problems. *Cognition and Instruction*, 14, 345-371.
- Gutstein, E. & Romberg, T. A. (1995). Teaching children to add and subtract. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 283-324.
- Haylock, D., & Cockburn, A. (1989). *Understanding early years mathematics*. London: Paul Chapman.
- Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Education Studies In Mathematics*, 12, 235-264.
- Lesh, R., & Landau, M. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. In R. Lesh & M. Landau (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 263-343). New York: Academic Press.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Mayer, R. E., Lewis, A. B. & Hegarty, M. (1992). Mathematical misunderstandings: Qualitative reasoning about quantitative problems. In J. I. D. Campbell (Ed.), *The nature and origins of mathematical skills* (pp. 137-153). New York: Elsevier Science.
- Moyer, J. C., Sowder, L., Threadgill-Sowder, J., & Moyer, M. B. (1984). Story problem formats: Drawn versus verbal versus telegraphic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 342-351.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, 13, 373-394.
- Ploya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.) *The development of mathematical thinking* (pp.153-196). New York: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Silver, E. A. & Thompson, A. G. (1984). Research perspectives on problem solving in elementary school mathematics. *The Elementary School Journal*, 84, 529-545.